Transformata Fouriera – dodatek (nierówność izoperymetryczna)

Nierówność izoperymetryczna w $\mathbb{R}^2$. Jeśli obszar $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ jest ograniczony lipszycowską krzywą $\partial\Omega$, to

$$|\partial\Omega|^2 \geqslant 4\pi|\Omega|,$$

a równość zachodzi jedynie, gdy Ω jest kołem.

Oznaczenia i konwencje. Rozważamy dodatnio zorientowaną parametryzację $\gamma\colon [0,1] \to \partial\Omega$ o stałej prędkości $|\dot\gamma| = L = |\partial\Omega|$, oznaczamy $g(t) = (x(t), y(t))$. Przypomnijmy podstawowe własności szeregów Fouriera:

$$\begin{aligned}
\hat{v}(k) &= \int_0^1 v(s)e^{-2\pi iks}ds \quad \text{dla } k \in \mathbb{Z} \\
v(s) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{v}(k)e^{2\pi iks} \quad \text{w } L^2(0,1) \\
\hat{\dot{v}}(k) &= -2\pi ik \cdot \hat{v}(k) \\
\int_0^1 |v(s)|^2 \,\mathrm{d}s &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{v}(k)|^2
\end{aligned}$$

Poniżej znajduje się dowód nierówności izoperymetrycznej pochodzący od Adolfa Hurwitza.

Zadanie 1. Wykazać, że wielkość

$$A := \frac{1}{2}\int_\gamma xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x(s)\dot{y}(s) - \dot{x}(s)y(s))\,\mathrm{d}s$$

jest równa polu $|\Omega|$.

Zadanie 2. Wykazać, że

$$\begin{aligned}
L^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} 4\pi^2k^2 \left(|\hat{x}(k)|^2 + |\hat{y}(k)|^2\right), \\
A &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2\pi ik \left(\hat{x}(k)\overline{\hat{y}(k)} - \overline{\hat{x}(k)}\hat{y}(k)\right).
\end{aligned}$$

Wywnioskować, że $L^2 \geqslant 4\pi A$.
Wskazówka. Warto zastosować tożsamość $|a \pm ib|^2 = |a|^2 + |b|^2 \pm i(a\overline{b} - \overline{a}b)$.

Zadanie 3. Prześledzić dowód nierówności i sprawdzić, że równość zachodzi jedynie dla parametryzacji postaci

$$(x(s), y(s)) = (x_0, y_0) + r \cdot (\cos(s + \theta), \sin(s + \theta)).$$